3С

УДК 517.988:004.89

И.А. Сыпко
Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83050, г. Донецк, пр. Богдана Хмельницкого, 84, sypko_i@i.ua

Приближенное моделирование процесса кристаллизации при наличии конвекции

I.A. Sypko
Donetsk National Technical University, Ukraine
Ukraine, 83050, c. Donetsk, Bogdana Khmelnitskogo av. 84, sypko_i@i.ua

Approximate Modeling of the Crystallization Process in the Presence of Convection

І.О. Сипко
ДВНЗ Донецький національний технічний університет, Україна
83650, м. Донецьк, пр. Б. Хмельницького, 84, sypko_i@i.ua

Наближене моделювання процесу кристалізації при наявності конвекції

Рассматривается задача управления информационными процессами при автоматизации технологии тепловой обработки металла. В качестве источника информации исследуется математическая модель, основанная на пространственной задаче Стефана, с учетом конвективного движения в жидкой фазе. Существование гладкого решения проблемы доказывается посредством двух не слишком ограничительных допущений, касающихся исходных данных проблемы. Приближенное решение построено при помощи метода малого параметра. Построено приближенное решение задачи.
Ключевые слова: процесс кристаллизации, математическая модель, задача Стефана, жидкая фаза, конвекция.

The problem of control of technologies process of metals thermal processing is considered. As information resource the three dimensional convection Stefan problem in liquid phase is investigated. The approximate solution is constructed by using the method of small parameter. Moreover, the author indicates a simple condition guaranteeing the existence of the corresponding stationary solution and its stability, the latter being understood in its usual sense. The approximate solution is considered.
Key words: process of crystallization, mathematical model, the task of Stephen, the liquid phase convection.

Розглядається задача управління технологічним процесом теплової обробки металу. В якості джерела інформації досліджується математична модель, базована на просторовій задачі Стефана, з урахуванням конвективного руху у рідинній фазі. Наближене рішення побудоване за допомогою методу малого параметра. Крім того, автором позначена проста умова, що забезпечує існування відповідного стаціонарного рішення і його стійкості, при цьому остання розуміється в звичайному сенсі. Побудовано наближений розв'язок задачі.
Ключові слова: процес кристалізації, математична модель, завдання Стефана, рідка фаза, конвекція.

Главной тенденцией в автоматизации является интенсивная разработка высокоорганизованных систем управления технологическими процессами на базе современных методов управления и средств вычислительной техники.

Стохастический характер функционирования производственных процессов, обусловленный случайным характером возмущающих воздействий и полезных сигналов, сложность математических моделей и критериев оптимизации приводит к существенным трудностям теоретического обоснования и решения практических проблем оптимальных автоматических и автоматизированных систем управления. На стадии проектирования АСУ ТП для уже существующих и строящихся печей возрастает важность обоснованности принимаемых инженерных решений. Разработка АСУ ТП должна опираться на исчерпывающие знания свойств процесса, изучаемого с точки зрения проблем автоматизации управления. В этой связи рассматриваемая задача построения математической модели как источника информации о процессе является актуальной.

Целью данной работы является обоснование математической модели как источника информации для решения вопросов всестороннего анализа и управления информационными потоками при автоматизации технологических процессов нагрева металла в проходных печах прокатного производства непрерывной разливки стали на основе математического и имитационного моделирования, анализа статистических данных и теплофизических экспериментальных измерений.

Работа посвящена изучению процессов кристаллизации двухкомпонентных сред в случае, когда распространение тепла связано не только с теплопроводностью, но и с конвективным переносом, присутствующим в жидкой фазе вещества. Рассматриваемая задача включает в себя как двухфазную задачу Стефана, так и начально-краевую задачу для системы Навье-Стокса, описывающую движение вязкой несжимаемой жидкости в нецилиндрической области. При изучении задачи учитывается скачек плотности вещества на границе раздела фаз.

Для описания поля скоростей в зоне поступления перегретого металла используется математическая модель затопленной струи вязкой жидкости, основанная на известном в теоретической гидродинамике точном решении нелинейной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса, а поскольку в затопленной струе перемешивание можно охарактеризовать так называемой свободной турбулентностью, характеризующейся одним числовым параметром – коэффициентом «кажущейся» или турбулентной вязкости V_T, полученные формулы можно интерпретировать как в ламинарном, так и в турбулентном приближениях.

Постановка задачи

Теплофизические процессы в кристаллизаторе, сопровождающиеся фазовыми переходами вещества, описываются математической моделью, в которой температура каждой из фаз удовлетворяет уравнению переноса тепла со своими теплофизическими коэффициентами. На границе раздела фаз обе температуры постоянны и равны температуре фазового перехода (для химической однородной среды), а на заданных частях границы – стенках кристаллизатора, поддоне – поддерживается определенный режим (теплоотвод, теплоизоляция др.). Поверхность раздела фаз (фронт кристаллизации) является неизвестной, или «свободной», границей, и для ее определения дополнительно задается «условие Стефана», означающее, что тепловой поток через фронт кристаллизации в сторону твердой фазы равен тепловому потоку со стороны жидкой фазы плюс скрытая теплота фазового перехода. Жидкая фаза рассматриваемого процесса заслуживает специального исследования ввиду априорной возможности существования поля скоростей, вызывающего интенсивную теплопередачу путем конвекции. Усиленная циркуляция в расплавленной шлаковой ванночке была обнаружена в исследовании академика Б.Е. Патона и его сотрудников [1].

Цель состоит в изучении гидродинамических явлений в жидкой фазе.

1 Рассмотрим область $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3 : r^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2)\}$ и через Γ^- и Γ^+ обозначим следующие сферы:

$$\Gamma^- = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}, \Gamma^+ = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}.$$

Далее, пусть Γ_0 гладкая, связная поверхность без самопересечений, держащая внутри Ω, которая разбивает ее на две подобласти Ω^+ и Ω^-, т.е. $\Omega = \Omega^+ \bigcup \Omega^-$ причем сфера Γ^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0. Рассмотрим краевую задачу со свободной границей Γ_0. Требуется определить тройку $(u^\pm(x), \Gamma_0)$ по следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u^\pm(x) = 0, x \in \Omega^\pm; u^\pm(x)|_{\Gamma^\pm} = B^\pm(x); \\ &u^\pm(x) = 1, \left|\nabla u^-(x)\right| - \left|\nabla u^+(x)\right| = 0, x \in \Gamma_0. \end{aligned} \qquad (1)$$

При этом, $B^\pm(x)$ и $u^\pm(x)$ – гладкие функции, а Γ_0 принадлежит классу C^∞ [2].

Затем введем в рассмотрение функцию $u(x)$, заданную следующим образом $u = u^-(x)$, при $x \in \overline{\Omega^-}$ и $u = u^+(x)$ при $x \in \overline{\Omega^+}$. Тогда функцию $u(x)$ можно найти из условия минимума функционала $I(u, \Gamma_0) = \iiint\limits_{\Omega} \left|\nabla u\right|^2 dx_1 dx_2 dx_3$ на соответствующем множестве R допустимых функций [2]. Это следует из формулы первой вариации интегрального функционала с неизвестной областью интегрирования [3].

Далее, удобно представить функционал I в сферических координатах:

$$I(u, \Gamma_0) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_r^{R} \left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\theta^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} u_\varphi^2\right) \rho^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho. \qquad (2)$$

Пусть тройка $(u^\pm, \Gamma_0)$ является классическим решением задачи (1). Тогда эта тройка будет стационарной для функционала (2) множества R.

Обратно, каждая стационарная тройка $(u^\pm(x), \Gamma_0)$ функционала на множестве R, где Γ_0 – достаточно гладкая, связная поверхность, является решением задачи (1).

Сформулированная задача (1) получается из задачи, изученной в [2], в случае $\vec{V} = 0$, т.е. в случае бесконечно большой вязкости, $\mathrm{Re} = 0$.

Поэтому в дальнейшем под решением задачи (1) при $\mathrm{Re} = 0$ будем понимать функции $\vec{V}(x) = 0, u^+(x)$ и $u^-(x)$, заданные в $\Omega^\pm$.

Из условий (1) следует, что Γ_0 – не что иное, как линия уровня функции $u(x)$, то есть:

$$\Gamma_0 = \{x \in \Omega : u(x) = 1\}.$$

Далее, если предположить выполнение следующего условия:

$$\pm(B^\pm(x) - 1) \ge \varepsilon_0 > 0, x \in \Gamma^\pm,$$

где ε_0 – некоторая постоянная, тогда поверхность Γ_0 лежит внутри области Ω и представляет собой поверхность класса C^∞, не имеющую самопересечений и располагающуюся относительно Γ^+ и Γ^- аналогично поверхности Γ_t (свободная поверхность), изученной в [2]. Следовательно, рассматривая функцию $u(x)$ в одной из областей $\Omega^\pm$, и принимая во внимание лемму о нормальной производной, находим что

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left|\nabla u\right| \ge \varepsilon > 0, x \in \Gamma_0,$$

где n – нормаль к Γ_0 направленная в сторону Ω_0^+, а ε – некоторая постоянная. Отсюда, применяя теорему о неявной функции, следует, что Γ_0 принадлежит классу C^∞, так как этому классу в некоторой окрестности Γ_0 принадлежит гармоническая функция $u(x)$.

2 Минимум функционала (2) на множестве R будем искать при помощи сумм:

$$u_n = B^+ \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}(B^- - B^+) + (R^2-\rho^2)(\rho^2-r^2)\sum_{k=0}^{n} C_k \rho^k y_k(\varphi,\theta),$$

где $y_k(\varphi,\theta)$ – сферические функции. Неизвестные коэффициенты C_k определяют при помощи метода Ритца. Тогда поверхность $\Gamma_0 : \rho = \rho_0(\varphi,\theta)$ определяется из уравнения $u_n(\varphi,\theta,\rho_0(\varphi,\theta)) = 1$.

При этом, необходимо учесть, что $|\nabla u(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$, в $\overline{\Omega}$, где ε_0 – некоторая постоянная [3].

При малых t справедливо представление:

$$\Gamma_t : \rho(\varphi,\theta,t) = \rho_0(\varphi,\theta) - \mathrm{Re}\frac{u_1^{\pm}(\varphi,\theta,t)}{|\nabla A^{\pm}(\varphi,\theta|} + 0(\mathrm{Re}), (\varphi,\theta) \in \Gamma_0.$$

Здесь Re – число Рейнольдса, а $u_1^{\pm}(\varphi,\theta,t)$ – первое приближение исходной задачи, изученной в [2].

В частности для нулевого приближения $u_0(\varphi,\theta)$ из уравнения:

$u_0 = B^+ + \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}(B^- - B^+) + (\rho^2-r^2)(R^2-\rho^2)C_0 = 1$ легко найти поверхность

$$\rho_0(\varphi,\theta) = \sqrt{\frac{(C_0(R^2+r^2) - \frac{B^- - B^+}{R^2-r^2}) \pm \sqrt{C_0(R^2+r^2) - \frac{B^- - B^+}{R^2-r^2})^2 + 4(\frac{R^2}{R^2-r^2}(B^- - B^+) + B^+) - 4C_0R^2r^2}}{2C_0}}.$$

При этом коэффициент C_0 находим методом Ритца. Имеем:

$$u_\theta = \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}(B_\theta^- - B_\theta^+) = F_2,$$

$$u_\rho = \frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2}(B_\varphi^- - B_\varphi^+) = F_1, -4\rho^3 + 2(R^2-r^2)\rho = F_3, -2\rho(B^- - B^+) = F_4, B^\pm = B^\pm(\varphi,\theta,t).$$

Таким образом, получим

$$I(u) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^R \left[(C_0F_3+F_4)^2 + \frac{1}{\rho^2}F_2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}F_1\right]\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta dy.$$

Построим уравнение Ритца:

$$\frac{\partial I}{\partial C_0} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^R (C_0F_3+F_4)F_3^2\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho = 0.$$

Отсюда получим

$$C_0 = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^R F_4F_3\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho,$$

$$C_0 = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^R F_4F_3\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho \Big/ \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^R F_3^2\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho$$

или

$$C_0 = \frac{-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^{R}\left[-4\rho^3 + 2(R^2 - r^2)\rho\right]Rp(B^- - B^+)\rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^{R}[-4 + 2(R^2 - r^2\rho]^2 \rho^2 \sin\theta d\varphi d\theta d\rho}.$$

На рис. 1 представлена поверхность Γ_t, которая расположена между сферами радиусов R и r при следующих значениях параметров: $t = 200, r = 0{,}8$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/3, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2, B^+ = 3[\cos^2\theta + \cos^2\varphi], B = -0{,}35[\cos^2\theta + \cos^2\varphi] - 0{,}1$, $u_1(\varphi,\theta,t) = \frac{1}{6}\rho_0^2(\varphi,\theta) + t$.

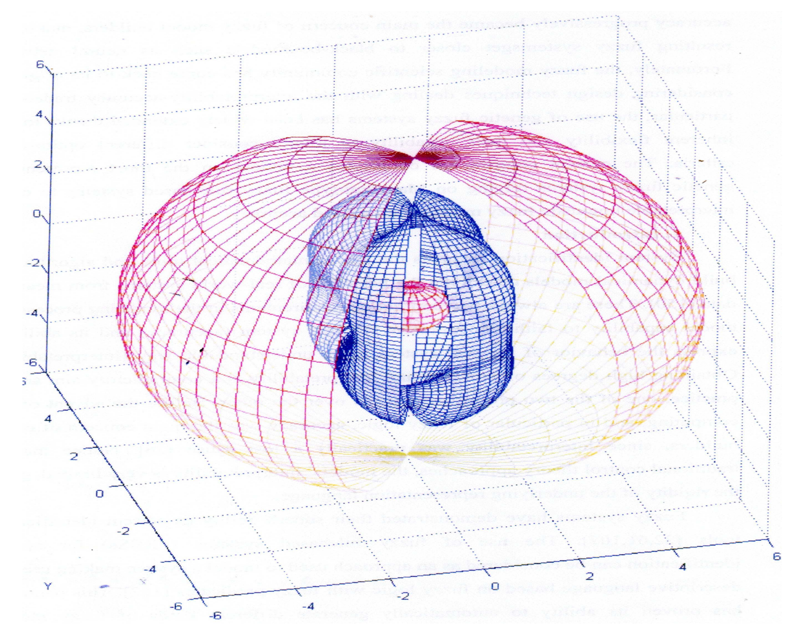


Рисунок 1 – Алгоритм построения поверхности Γ_t

Предложенный алгоритм построения поверхности Γ_t позволяет исследовать численно эту поверхность в зависимости от основных параметров задачи.

Литература

1. Патон Б.Е. Избранные труды / Патон Б.Е. – Киев : Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.
2. Миненко А.С. Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана / А.С. Миненко, А.И. Шевченко // Доповіді НАН України. – 2010. – № 4. – С. 30-34. (фахове наукове видання України, включене до затвердженого ВАК переліку).
3. Миненко А.С. Методы исследования нелинейных математических моделей / А.С. Миненко, А.И. Шевченко. – Київ : Наукова думка, 2012. – 130 с.

Literatura

1. Paton B.E. Selected works / Paton B.E. – Kiev : Electric Welding Institute named E.O. Paton of the NAS of Ukraine, 2008. – 893 s.
2. Minenko A.S. Approximate analysis of multi-dimensional convection of Stefan / A.S. Minenko, A.I. Shevchenko // Reports of NAS of Ukraine. – 2010. – № 4 – S. 30-34. (professional journals Ukraine included in the list of approved HAC).
3. Minenko A.S. Methods for the study of nonlinear mathematical models / A.S. Minenko, A.I. Shevchenko. – Kiev : Naukova Dumka, 2012. – 130 s.

RESUME

I.A. Sypko

Approximate Modeling of the Crystallization Process in the Presence of Convection

This paper extend to time-dependent case some result obtained by the author for steady-state Stefan problem with convection. Referring to the ice-water system, water is assumed to be incompressible and to obey the Stokes equation $\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla_x p = f(u^{(+)})$ (v – velocity, ν – kinematic viscosity, p – pressure, f – buoyancy force, $u^{(+)}$ – water temperature), while temperature $u^{(+)}$ satisfies the heat conduction-convection equation with temperature- dependent thermophysical properties. The temperature field $u^{(+)}$ in the solid phase is governed by diffusion only. At the ice-water interface, $u^{(+)} = u^{(-)} = 0$ and the Stefan condition holds. The sheme is completed by initial and boundary conditions.

The author present an existence theorem for the case of three space dimensions. The main difficulty consists in the fact that, to interpret the Stokes equation in the weak sense, some information is needed on the region where the temperature is positive, which is in turn influenced by the velocity field itself. The precise formulation of the problem requires a technical choice on function spaces. Existence of solution is proved by introducing a temperature dependent penalty term in the fluid flow equation in order to define both the approximating temperature u_ε and approximation velocity v_ε in the whole domain. Compactness arguments are used to get a convergent subsequence, whose limit is shown to solve the original problem. The question of uniqueness is left open.

Статья поступила в редакцию 09.04.2013.